Trigonometrijske funkcije u zadacima s matematičkih natjecanja

Zadatak 1: (Školsko natjecanje 2008.,3.r.)

Ako je $\sin 2x = a, odredite\ \ sin^6x + cos^6x$

Rješenje:

Kubiranjem osnovnog trigonometrijskog identiteta $sin^2x + cos^2x = 1$ slijedi

$$sin^6x + 3sin^4xcos^2x + 3sin^2xcos^4x + cos^6x = 1.$$

Sređivanjem dobivamo

$$sin^6x + cos^6x + 3sin^2xcos^2x(sin^2x + cos^2x) = 1$$

odnosno

$$sin^6x + cos^6x = 1 - 3sin^2xcos^2x = 1 - 3\frac{sin^2 2x}{4} = 1 - \frac{3}{4}a^2 \quad .$$

Zadatak 2: (Županijsko natjecanje 2010.,3.r)

$Ako\ je\ a + a^{-1} = 2cosx,\ \ dokažite\ da\ je\ tada\ \ a^4 + a^{-4} = 2cos4x.$

Rješenje:

Kvadriranjem zadane jednakosti dobivamo

$$a^2 + 2aa^{-1} + a^{-2} = 4cos^2x$$

$$a^2 + a^{-2} = 4cos^2x - 2$$

$$a^2 + a^{-2} = 4cos^2x - 2(sin^2x + cos^2x)$$

$$a^2 + a^{-2} = 2(cos^2x - sin^2x)$$

$$a^2 + a^{-2} = 2\cos 2x.$$

Zadnju jednakost ponovo kvadriramo i analogno postupamo:

$$a^4 + 2a^2a^{-2} + a^{-4} = 4cos^2 2x$$

$$a^4 + a^{-4} = 4cos^2 2x - 2$$

$$a^4 + a^{-4} = 4cos^2 2x - 2(sin^2 2x + cos^2 2x)$$

$$a^4 + a^{-4} = 2(cos^2 2x - sin^2 2x)$$

$a^4 + a^{-4} = 2\cos 4x,$ što je trebalo pokazati.

Zadatak 3: (Županijsko natjecanje 1994.,3.r.)

$Za \quad \alpha, \beta \, \epsilon \langle 0, \pi \rangle$ *izrazite broj* $tg\frac{\propto}{2} + tg\frac{\beta}{2}$ *pomoću brojeva* $a = sin \propto + sin\beta$ *i*

$b = cos\alpha + cos\beta$.

Rješenje:

$$tg\frac{\propto}{2} + tg\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\propto}{2}}{\cos\frac{\propto}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\propto}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\propto}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\propto}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \quad (1)$$

Da bi odredili vrijednost traženog izraza, treba odrediti vrijednosti brojnika i nazivnika.

Kvadriranjem izraza $a = sin \propto + sin\beta$ dobijemo $a^2 = sin^2 \propto + sin^2\beta + 2sin \propto \; sin\beta$. Analogno, iz $b = sin \propto + sin\beta$ dobijemo $b^2 = cos^2 \propto + cos^2\beta + 2cos \propto cos\beta$.

Zbrojimo li ove dvije jednakosti i uredimo taj zbroj pomoću osnovnih trigonometrijskih identiteta i adicijske formule za kosinus razlike, slijedi

$\cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$, a primjenom formule za kosinus polovičnog kuta imamo:

$$\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{a^2+b^2-2}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Primjenom formule za pretvorbu zbroja funkcija kosinus u njihov produkt imamo:

$$b = cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\propto+\beta}{2}cos\frac{\propto-\beta}{2}, \text{ pa je}$$

$$cos\frac{\propto+\beta}{2} = \frac{b}{2cos\frac{\propto-\beta}{2}} = \frac{b}{2\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Vrijedi i $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{1 - cos^2\frac{\propto+\beta}{2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (2) , pa je vrijednost brojnika izražena zadanim elementima.

Sad još pretvaramo i produkt kosinusa u zbroj da uredimo nazivnik:

$$\cos\frac{\propto}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\left(cos\frac{\propto+\beta}{2} + cos\frac{\propto-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{a^2+b^2+2b}{4\sqrt{a^2+b^2}} \quad (3)$$

Konačno, uvrstimo li (2) i (3) u (1) , slijedi

$$tg\frac{\propto}{2} + tg\frac{\beta}{2} = \frac{4a}{a^2+b^2+2b} \quad .$$

Zadatak 4: (Školsko natjecanje 2011.,3.r.)

$Ako\ je\ tgx = 4 + ctgx, izračunajte\ \frac{tg^2x - ctg^2x}{tg^3x + ctg^3x}$.

Rješenje:

$$\frac{tg^2x - ctg^2x}{tg^3x + ctg^3x} = \frac{(tgx - ctgx)(tgx + ctgx)}{(tgx + ctgx)(tg^2x - tgxctgx + ctg^2x)} = \frac{tgx - ctgx}{tg^2x + ctg^2x - 1}$$

Iz uvjeta $tgx = 4 + ctgx$ slijedi $tgx - ctgx = 4$, a kvadriranjem tog izraza dobijemo $tg^2x - 2tgxctgx + ctg^2x = 16$, odnosno, $tg^2x + ctg^2x = 18$, a ovaj izraz lako prilagodimo nazivniku pa vrijedi $tg^2x + ctg^2x - 1 = 17$.

Dakle,

$$\frac{tg^2x - ctg^2x}{tg^3x + ctg^3x} = \frac{tgx - ctgx}{tg^2x + ctg^2x - 1} = \frac{4}{17}\ .$$

Zadatak 5: (Županijsko natjecanje 2007.,4.r.)

$Zbroj\ triju\ pozitivnih\ realnih\ brojeva\ x, y, z\ jednak\ je\ \frac{\pi}{2}.$

$Izračunajte\ ctgx\ ctgz\ ako\ ctgx, ctgy, ctg\ z\ čine\ aritmetički\ niz.$

Rješenje:

Za x, y, z > 0 vrijedi $x + y + z = \frac{\pi}{2}$

Iz definicije aritmetičkog niza slijedi $ctgy = \frac{ctgx + ctgz}{2}$

Iz adicijskog teorema za kotangens zbroja $ctg(x + z) = \frac{ctgxctgz - 1}{ctgx + ctgz}$ dobijemo

$$\begin{aligned} ctgx\ ctgz &= 1 + (ctgx + ctgz)ctg(x + z) \\ &= 1 + 2ctgy\ ctg\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \\ &= 1 + 2ctgy\ tgy = 1 + 2 = 3\ . \end{aligned}$$

Zadatak 6: (Školsko natjecanje 2011.,4.r.)

$Ako\ su\ \ sin(y+z-x)\ ,\ sin(z+x-y),\ sin(x+y-z)$
$uzastopni\ članovi\ aritmetičkog\ niza\ ,\ dokaži\ da\ su\ to\ i\ \ tgx,\ tgy,\ tgz.$

Rješenje:

Uvjet da su $sin(y+z-x)$, $sin(z+x-y)$, $sin(x+y-z)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza možemo zbog njegove definicije zapisati ovako:

$$sin(z+x-y)-sin(y+z-x)=\ sin(x+y-z)-\ sin(z+x-y)$$

Pretvorimo li ove razlike sinusa u produkt, dobivamo

$$2cos\frac{2z}{2}sin\frac{2(x-y)}{2}=2cos\frac{2x}{2}sin\frac{2(y-z)}{2}$$

odnosno $$cosz\ sin(x-y)=cosx\ sin(y-z).$$

Ako sad primijenimo adicijsku formulu za sinus razlike i uredimo izraz imamo

$$cosz\ sinx\ cosy-cosz\ cosx\ siny=cosx\ siny\ cosz-cosx\ cosy\ sinz\ . \quad (1)$$

Uočimo da zbog domene funkcije tangens mora vrijediti da su $x\ ,y\ ,z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\epsilon\mathbb{Z}$.
Stoga je i $cosx\ cosy\ cosz\ \neq 0$, pa s tim izrazom dijelimo izraz (1), te slijedi

$$tgx-tgy=tgy-tgz$$

Vidimo da su tg x, tg y, tg z uzastopni članovi aritmetičkog niza, što je i trebalo pokazati.

Zadatak 7: (Državno natjecanje 2007.,3.r.)

a) $Dokažite\ da\ vrijedi\ tg3x=tgx\ tg(60°+x)tg(60°-x)$
b) $Izračunajte\ \ tg\ 20°\ tg\ 40°\ tg\ 60°\ tg\ 80°.$

Rješenje:

a) Primjenom adicijske formule za tangens slijedi:

$$tg3x=\ tg(2x+x)=\frac{tg\ 2x+tg\ x}{1-tg\ 2x\ tg\ x}$$

$$=\frac{\frac{2tg\ x}{1-tg^2x}+tg\ x}{1-\ tg\ x\frac{2tg\ x}{1-tg^2x}}=\frac{\frac{3tg\ x-\ tg^3x}{1-tg^2x}}{\frac{1-3\ tg^2x}{1-tg^2x}}$$

$$=\frac{tg\ x-\ tg^3x}{1-3\ tg^2x}\quad .$$

S druge strane, vrijedi

$$tgx\ tg(60° + x)tg(60° - x) = tg\ x\ \frac{1 - tg\ 60°\ tg\ x° + tg\ x}{1 - tg\ 60°\ tg\ x} \frac{tg\ 60° - tg\ x}{1 + tg\ 60°\ tg\ x}$$

Uz primjenu razlike kvadrata i vrijednosti $tg\ 60° = \sqrt{3}$ dobijemo

$$tgx\ tg(60° + x)tg(60° - x) = tg\ x\ \frac{3 - tg^2x}{1 - 3tg^2x} = \frac{3tgx - tg^3x}{1 - 3tg^2x}$$, pa je tvrdnja dokazana.

b) U upravo dokazanoj jednakosti za $x = 20°$ imamo

$$tg60° = tg20°tg80°tg40° \quad / \, tg60°$$

$$tg^2 60° = tg20°tg40°tg60°tg80°$$, pa je

$$tg20°tg40°tg60°tg80° = 3 \quad .$$

Zadatak 8: (Državno natjecanje 1996.,3.r.)

Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi nejednakost* $sin^5x + cos^5x + sin^4x \leq 2$.

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje:

$$\begin{aligned} sin^5x + cos^5x + sin^4x &\leq sin^4x + cos^4x + sin^4x = 2\ sin^4x + (1 - sin^2x)^2 \\ &= 3\ sin^4x - 2sin^2x + 1 \\ &= 3\left(sin^2x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \leq 3\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako je $sin^5 = sin^4x,\ cos^5x = cos^4x\ ,\ sin^2x = 1$.

Iz $sin^4x(\sin x - 1) = 0$ *i* $sin^2x = 1$ *slijedi* $\sin x = 1$.

Zaključujemo da jednakost vrijedi samo za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.